Approche de la fonction gamma d'Euler

Les parties I et II sont indépendantes mais utilisées par la partie III

Partie I

Pour tout réel a positif ou nul, on note g_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$* par $g_a(t) = t^a$.

1. Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en 0 (on notera toujours g_a la fonction ainsi prolongée, qui est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$).
   Préciser la valeur de $g_a(0)$.
   Montrer que la fonction g_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $a \geq 1$.

Soit a et b deux réels positifs ou nuls. On pose :
$I(a,b) = \int_0^1 g_a(t) g_b(1-t)\,dt$.

2. Justifier l'existence de l'intégrale $I(a,b)$.
   Comparer $I(a,b)$ et $I(b,a)$.

On écrira abusivement $I(a,b) = \int_0^1 t^a (1-t)^b\,dt$.

3. Soit a et b deux réels positifs ou nuls. Trouver une relation entre $I(a+1,b)$ et $I(a,b+1)$.

4. Calculer $I(a,0)$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :
   $I(a,n) = \dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}$.

5. Soit p et q deux entiers naturels. Exprimer $I(p,q)$ à l'aide de factorielles.

6. En déduire la valeur de l'intégrale $J(p,q) = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2p+1} (\cos\theta)^{2q+1}\,d\theta$
   où p et q sont deux entiers naturels.

Partie II

Pour tout réel a strictement positif, on note f_a la fonction définie par : $f_a(x) = x \ln\left(1 - \dfrac{a}{x}\right)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f_a.

On note $\mathcal{C}_a$ la courbe représentant la restriction de la fonction f_a à l'intervalle $]a,+\infty[$.

2. Si a et x sont deux réels tels que $0 < a < x$, démontrer l'encadrement
   $\dfrac{a}{x} \leq \ln x - \ln(x-a) \leq \dfrac{a}{x-a}$.

3. En déduire les variations de la fonction f_a sur l'intervalle $]a,+\infty[$
   (on dressera un tableau de variations).
   Préciser la nature des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_a$.

4. Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sur un même schéma.

5. On fixe $a > 0$ et on considère la suite $y = (y_n)$ définie, pour tout entier naturel n tel que $n > a$, par
   $y_n = \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n$.
   Etudier le comportement (sens de variation, limite) de la suite (y_n).

Partie III

Pour tout réel positif ou nul x et tout entier naturel non nul n, on pose $F_n(x) = \int_0^n \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n u^x\,du$.

1. Montrer que $F_n(x) = n^{x+1} I(x,n)$.

2. En utilisant les résultats le la partie II, montrer que, pour tout x fixé, la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

3.a On fixe $x \geq 0$.
Montrer l'existence d'un réel strictement positif U tel que :
$\forall u \in \mathbb{R}^+, u \geq U \Rightarrow e^{-u} \leq \dfrac{1}{u^{x+2}}$.

3.b En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a
$F_n(x) \leq \int_0^U e^{-u} u^x \, du + \dfrac{1}{U}$.

3.c Montrer que la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Pour tout réel positif ou nul x , on pose $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

4. Démontrer la relation fonctionnelle
$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x+1) = (x+1)F(x)$.
En déduire la valeur de $F(k)$ pour k entier naturel.